Über eine Anwendung der Variationsgleichungen und der Theorie der charakteristischen Exponenten auf die Mondbewegung

---

Von der
Technischen Hochschule zu Breslau
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte

Dissertation

Vorgelegt von

Alfred Karras
Studienassessor
aus Breslau

Referent:
Professor Dr. phil. H. Happel

Korreferent:
Professor Dr. phil., Dr.-Ing. E. h. Schmeidler

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Oktober 1937

Spezialbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig
1937

*41438

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Der Mondtheorie kommt ein besonderer Platz im Problem der drei Körper zu. Das hat seinen Grund darin, daß die Abweichungen des Mondes von der Keplerellipse im Vergleich zu den Störungen eines Planeten besonders groß sind. Die wichtigsten Ursachen dieser großen Ungleichungen sind die große Masse des störenden Körpers, der Sonne, gegenüber der kleinen Masse der Erde, des Zentralkörpers, und die verhältnismäßig kurzen Perioden der wichtigsten Mondstörungen, deren Koeffizienten groß sind, so daß sie merkbare Abweichungen von der elliptischen Bahn bewirken. Aus diesem Grunde ist der Berechnung der Mondbahn schon immer einer der wichtigsten Plätze in der Himmelsmechanik eingeräumt worden. Euler, Laplace, Delaunay, Hansen, Hill, Brown, Gyldén und andere haben seine Ungleichungen mit Benutzung der verschiedensten Koordinaten berechnet.

Um dabei unpraktische Reihenentwicklungen zu vermeiden, muß man die Keplerellipse als Grundlage der Approximationen aufgeben. Herr Prof. Dr. Happel hat in seiner Theorie des eingeschränkten Dreikörperproblems des Mondes (erstmalig in seinem demnächst erscheinenden Buch über das Dreikörperproblem veröffentlicht) in Anlehnung an Gyldén einen Kreis $r = a$ als Bezugsbahn eingeführt und die Abweichungen von dieser und dem Flächensatz $r^2 \dot{v} = \text{const}$ durch zwei Funktionen φ und S beschrieben, für die er den Gyldénschen Gleichungen ähnliche Differentialgleichungen aufgestellt hat. Diese bestimmen bis auf die parallaktischen alle im Problem restreint vorkommenden Mondstörungen mit Einschluß der von der Mondexzentrizität abhängigen. Herr Prof. Dr. Happel hat bei ihrer Integration die Exzentrizität e der ungestörten Mondbahn vernachlässigt, also die vereinfachende Annahme ge-

macht, daß die ungestörte Mondbahn ein Kreis ist. In sehr einfacher und eleganter Weise ist es so möglich, die von der ungestörten (einen Kreis durchlaufenden) Sonne erzeugten periodischen Ungleichungen, die sogenannte Variation zu berechnen. Da diese Untersuchungen noch nicht zugänglich sind, habe ich sie im 1. Kapitel dargestellt.

Das Ziel dieser Arbeit ist eine Erweiterung der Untersuchungen über die Variation. Diese soll gestatten, die im 1. Kapitel gemachte vereinfachende Annahme $e = 0$ fallen zu lassen und somit die mit der Exzentrizität e der ungestörten Mondbahn proportionalen Ungleichungen des Mondes zu ermitteln. Von der Variation ausgehend habe ich im 2. Kapitel die Gleichungen für die Funktionen φ und S für den Fall integriert, daß die ungestörte Mondbahn eine Keplerellipse ist. Das gelingt durch Aufstellung der Poincaréschen „Equations aux Variations", der Variationsgleichungen für das Differentialgleichungssystem der Funktionen φ und S, indem man deren mit Variation bezeichnete partikuläre Lösung als „Erzeugende" benutzt. Die Variationsgleichungen sind gleichwertig mit einem System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Ihre Integration geschieht hier am einfachsten durch sukzessive Approximation. Diese liefert durch verhältnismäßig einfache Rechnungen die wichtigsten von der Mondexzentrizität abhängigen Störungen. Den Schluß dieses Kapitels bildet die Aufstellung einer Näherung der „2. Variationsgleichungen", welche die mit e^2 proportionalen Glieder der Mondstörungen zu berechnen gestatten. Im 3. Kapitel zeige ich endlich durch Aufstellung der charakteristischen Exponenten der Variationsgleichungen, daß die durch die Variation beschriebene periodische Bahn stabil ist.

I.

1. Im eingeschränkten Dreikörperproblem des Mondes sind folgende vereinfachende Annahmen gemacht: a) Die drei Körper Erde, Mond, Sonne bewegen sich in einer raumfesten Ebene, die Neigung der Mondbahn gegen die Ebene der Ekliptik wird also vernachlässigt. b) Die Sonne beschreibt um die Erde als Zentralkörper einen Kreis, wird also durch den Mond nicht gestört.

Es seien M, m, m_1 Masse und Ort von Erde, Mond und Sonne, r und a_1 die Radienvektoren von der Erde nach Mond und Sonne und Δ der Abstand Mond — Sonne. Mit $v_1 = n_1\ t + \text{const}$ und v werden die wahren Längen von Sonne und Mond bezeichnet, gemessen von einer durch M gehenden raumfesten Richtung x in der Ebene der Bewegung. Wählt man die Einheiten so, daß die Gravitationskonstante gleich 1 ist, dann lauten die Bewegungsgleichungen für den Mond in den Polarkoordinaten r und $H = v - v_1$ bei Vernachlässigung der parallaktischen Glieder $\left(\text{mit } \frac{r^2}{a_1^3} \cdot \frac{r}{a_1}\right)$ im Potential V

$$(1) \qquad \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{v}^2 = \dfrac{\partial V}{\partial r} \qquad \dfrac{d}{dt}(r^2\dot{v}) = \dfrac{\partial V}{\partial H} \\ V = \dfrac{M+m}{r} + \dfrac{m_1 r^2}{a_1^3}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\cos 2H\right). \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen wird die Bewegung des Mondes in bezug auf ein Koordinatensystem beschrieben, das sich mit der Sonne gleichförmig um die Erde dreht.

2. Zur Integration der Gleichungen (1), die auf direktem Wege nicht möglich ist, hat Herr Prof. Dr. Happel die sogenannte „Bezugsbahn“ eingeführt. Er versteht darunter die Kreisbahn vom

Radius a, die man erhält, wenn man die Exzentrizität e der ungestörten (elliptischen) Mondbahn gleich Null setzt. Für die Sonne und für die Bewegung des Mondes in der gedachten Bezugsbahn gelten die Gleichungen

$$v_1 = n_1 t + \text{const.} \qquad v = nt + \text{const.}$$

$$n_1^2 = \frac{M+m_1}{a_1^3} \approx \frac{m_1}{a_1^3} \qquad n^2 = \frac{M+m}{a^3},$$

da man die Masse M der Erde gegen die große Masse m_1 der Sonne vernachlässigen kann. (Die beiden letzten Gleichungen bestehen, da die Zentripetalbeschleunigung $n_1^2 a_1$ der Sonne gleich der Summe der Gravitationsbeschleunigungen $\frac{m_1}{a_1^2}$ der Sonne auf die Erde und $\frac{M}{a_1^2}$ der Erde auf die Sonne ist, und entsprechend für den Mond.) Es wird abgekürzt

$$(2) \quad \left| \begin{array}{ll} M+m = k^2 & \dfrac{n_1}{n} = \mu, \\ \text{also } n^2 = \dfrac{k^2}{a^3} \quad n_1^2 = \dfrac{m_1}{a_1^3} & V = \dfrac{k^2}{r} + n_1^2 r^2 \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} \cos 2H \right). \end{array} \right.$$

Für die Bewegung des Mondes m in der Bezugsbahn gelten dann die Gleichungen

$$(3) \qquad r = a \qquad r^2 \dot{v} = \sqrt{(M+m)a} = k\sqrt{a} \quad \text{(Flächensatz)}.$$

In der wirklichen Bahn haben der Radiusvektor r und die Flächenkonstante natürlich einen anderen Wert, sie werden noch von der Sonnenstörung und der Exzentrizität e der ungestörten Mondbahn abhängen. Herr Prof. Dr. Happel beschreibt diese Abweichungen durch die beiden Funktionen φ und S, die er in Anlehnung an Gyldén durch die Gleichungen

$$(4) \qquad r = a(1+\varphi) \qquad r^2 \dot{v} = \frac{k\sqrt{a}}{1+S}$$

definiert, wo also die mit Hilfe der Bewegungsgleichungen zu bestimmenden Funktionen φ und S die Störungen durch die Sonne

einschließlich der von der Mondexzentrizität abhängigen Störungen enthalten.

3. Bei der Aufstellung der Differentialgleichungen für φ und S wird statt der Zeit t der Winkel $H = v - v_1$ als unabhängige Veränderliche eingeführt. Man braucht dazu eine Beziehung zwischen H und t. Sie ergibt sich aus der zweiten Gleichung (4) bei Berücksichtigung der in (2) erwähnten Abhängigkeit $n^2 = \frac{k^2}{a^3}$ zu

$$a^2(1+\varphi)^2\left(\frac{dH}{dt}+n_1\right)=\frac{k\sqrt{a}}{1+S}$$

$$\frac{dH}{dt}=-n_1+n\frac{1}{(1+\varphi)^2(1+S)}.$$

Mit der Abkürzung $\frac{n_1}{n}=\mu$ lautet sie schließlich

$$\frac{dH}{dt}=n\frac{1-\mu(1+\varphi)^2(1+S)}{(1+\varphi)^2(1+S)}. \tag{5}$$

Hieraus findet man weiter

$$\text{A)}\quad \frac{d^2H}{dt^2}=-\frac{n}{(1+\varphi)^4(1+S)^2}\left\{2(1+\varphi)(1+S)\frac{d\varphi}{dH}\frac{dH}{dt}+(1+\varphi)^2\frac{dS}{dt}\right\}.$$

Für S als Funktion von H ergibt sich mit der Definitionsgleichung (4, 2) aus der zweiten Bewegungsgleichung (1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{k\sqrt{a}}{1+S}\right)=\frac{\partial V}{\partial H}$$

$$\text{B)}\quad \frac{dS}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial H}\frac{(1+S)^2}{k\sqrt{a}},$$

also

$$\frac{dS}{dH}=\frac{dt}{dH}\left(-\frac{\partial V}{\partial H}\right)\frac{(1+S)^2}{k\sqrt{a}}.$$

Mit dem Werte (5) für $\frac{dt}{dH}$ und des sich aus (2) ergebenden Wertes für $\left(-\frac{\partial V}{\partial H}\right)$ wird bei Beachtung der Abkürzungen (2)

$$\frac{dS}{dH}=\frac{(1+\varphi)^2(1+S)}{n[1-\mu(1+\varphi)^2(1+S)]}\cdot\frac{3}{2}\,n_1{}^2a^2(1+\varphi)^2\sin 2H\cdot\frac{(1+S)^2}{k\sqrt{a}}$$

$$=\frac{3}{2}\mu^2\sin 2H\frac{(1+\varphi)^4(1+S)^3}{1-\mu(1+\varphi)^2(1+S)}. \tag{6}$$

Zur Ableitung der Differentialgleichung für φ aus der ersten Gleichung (1) benötigt man noch eine Beziehung zwischen H und v: Aus der zweiten Gleichung (4) folgt bei Benutzung der ersten

$$\dot{v}=\frac{dv}{dH}\cdot\frac{dH}{dt}=\frac{k\sqrt{a}}{a^2(1+\varphi)^2(1+S)}=\frac{n}{(1+\varphi)^2(1+S)}$$

und mit dem Werte (5) für $\frac{dH}{dt}$

$$\frac{dH}{dv}=1-\mu(1+\varphi)^2(1+S). \tag{7}$$

Nun kann man aus der ersten Bewegungsgleichung (1) mit $r=a(1+\varphi)$ die Differentialgleichung für φ bilden:

$$a\frac{d^2\varphi}{dt^2}-a(1+\varphi)\left(\frac{dv}{dH}\frac{dH}{dt}\right)^2=\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dH^2}\left(\frac{dH}{dt}\right)^2+\frac{d\varphi}{dH}\frac{d^2H}{dt^2}-(1+\varphi)\left(\frac{dv}{dH}\right)^2\left(\frac{dH}{dt}\right)^2=\frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Mit (5) und (A) wird hieraus, wenn man überall $1-\mu(1+\varphi)^2(1+S)$ wegen (7) durch $\frac{dH}{dv}$ ersetzt und die Gleichung (B) benutzt,

$$\frac{d^2\varphi}{dH^2}n^2\left(\frac{dH}{dv}\right)^2\frac{1}{(1+\varphi)^4(1+S)^2}-\frac{d\varphi}{dH}\frac{n}{(1+\varphi)^4(1+S)^2}$$

$$\cdot\left\{2(1+\varphi)(1+S)\frac{d\varphi}{dH}\cdot\frac{n}{(1+\varphi)^2(1+S)}\frac{dH}{dv}+(1+\varphi)^2\frac{(1+S)^2}{k\sqrt{a}}\left(-\frac{\partial V}{\partial H}\right)\right\}$$

$$-(1+\varphi)\left(\frac{dv}{dH}\right)^2\frac{n^2}{(1+\varphi)^4(1+S)^2}\left(\frac{dH}{dv}\right)^2=\frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Setzt man hier noch für die Ableitungen von V die sich aus (2) ergebenden Werte

$$-\frac{\partial V}{\partial H}=\frac{3}{2}n_1{}^2a^2(1+\varphi)^2\sin 2H,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{k}{a^2(1+\varphi)^2} + n_1{}^2 a(1+\varphi)\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2H\right)$$

ein, dann liefert die Multiplikation mit $\frac{1}{n^2}(1+\varphi)^5(1+S)^2$ bei Beachtung der Beziehungen (2) die einfachere Gleichung

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi}{dH^2}(1+\varphi)\left(\frac{dH}{dv}\right)^2 - 2\left(\frac{d\varphi}{dH}\right)^2\frac{dH}{dv} \\ &-\frac{3}{2}\mu^2\frac{d\varphi}{dH}(1+\varphi)^5(1+S)^2\sin 2H - (1+\varphi)^2 \\ &= -(1+\varphi)^3(1+S)^2 + \mu^2(1+\varphi)^6(1+S)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2H\right). \end{aligned}\right.$$

Das ist die gesuchte Differentialgleichung für φ.

Der Übersicht halber seien die Gleichungen (5) bis (8), die das eingeschränkte Dreikörperproblem des Mondes bei Vernachlässigung der parallaktischen Glieder streng bestimmen, noch einmal zusammengestellt:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dS}{dH} = \frac{3}{2}\mu^2\sin 2H\frac{(1+\varphi)^4(1+S)^3}{1-\mu(1+\varphi)^2(1+S)} \\ &\frac{d^2\varphi}{dH^2}(1+\varphi)\left(\frac{dH}{dv}\right)^2 = 2\left(\frac{d\varphi}{dH}\right)^2\frac{dH}{dv} \\ &\qquad +\frac{3}{2}\mu^2\frac{d\varphi}{dH}(1+\varphi)^5(1+S)^2\sin 2H \\ &\qquad -(1+\varphi)^2[(1+\varphi)(1+S)^2-1] \\ &\qquad +\mu^2(1+\varphi)^6(1+S)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2H\right) \\ &\frac{dH}{dv} = 1-\mu(1+\varphi)^2(1+S) \\ &\frac{dH}{dt} = n\frac{1-\mu(1+\varphi)^2(1+S)}{(1+\varphi)^2(1+S)} \end{aligned}\right.$$

Sie bestimmen beim ebenen Problem die Störungen, die von der Einwirkung der ungestörten Sonne ($e_1 = 0$) und der Exzentrizität e der ungestörten Mondbahn abhängen. In den beiden ersten Glei-

chungen (9) kommen nach Einsetzen von $\frac{dH}{dv}$ aus der dritten Gleichung nur die Funktionen S, φ und ihre Ableitungen nach H als Variable vor. Sie bestimmen S und φ als Funktion des Winkels H, also die Gestalt der Bahnkurve. Aus der vierten Gleichung (9) kann man dann H als Funktion von t ermitteln, womit man die Länge $v = H + v_1$ des Mondes als Funktion der Zeit kennt. Damit ist auch $S = S(t)$ und $\varphi = \varphi(t)$ bekannt, der zeitliche Verlauf der Bewegung also bestimmt.

4. Herr Prof. Dr. Happel hat aus den Gleichungen (9) die mit Variation bezeichneten Mondstörungen berechnet, die allein von der störenden Wirkung der Sonne, also von μ, nicht aber von der Mondexzentrizität e abhängen. Er konnte so die vereinfachende Annahme machen, daß die ungestörte Mondbahn ein Kreis ist. Vernachlässigt man die Mondexzentrizität, dann ist die Integration des Systems (9) sehr einfach. Aus der ersten Gleichung (9) ist ersichtlich, daß S von der Ordnung μ^2 ist. Man wird deshalb, auch für φ, zum Ansatz.

$$(10) \quad S = S_1\mu^2 + S_2\mu^3 + S_3\mu^4 + \cdots \qquad \varphi = \varphi_1\mu^2 + \varphi_2\mu^3 + \varphi_3\mu^4 + \cdots$$

geführt, wo $S_i = S_i(H)$ und $\varphi_i = \varphi_i(H)$ ist. Die hingeschriebenen Glieder sollen im folgenden kurz berechnet werden. Dazu hat man mit obigem Ansatz in die Gleichungen (9) einzugehen. Bis zur erstrebten Genauigkeit gibt das bei den ersten beiden Gleichungen (9) die Gleichungen

$$\frac{dS_1}{dH}\mu^2 + \frac{dS_2}{dH}\mu^3 + \frac{dS_3}{dH}\mu^4 = \frac{3}{2}\mu^2 \sin 2H[1 + \mu + \mu^2 + 4\varphi_1\mu^2 + 3S_1\mu^2]$$

$$\left(\frac{d^2\varphi_1}{dH^2}\mu^2 + \frac{d^2\varphi_2}{dH^2}\mu^3 + \frac{d^2\varphi_3}{dH^2}\mu^4\right)(1 - 2\mu + \mu^2 + \varphi_1\mu^2) = 2\left(\frac{d\varphi_1}{dH}\right)^2\mu^4$$

$$+ \frac{3}{2}\mu^4\frac{d\varphi_1}{dH}\sin 2H + \mu^2(1 + 6\varphi_1\mu^2 + 2S_1\mu^2)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2H\right)$$

$$- (\varphi_1\mu^2 + 2S_1\mu^2 + \varphi_2\mu^3 + 2S_2\mu^3 + \varphi_3\mu^4 + 2S_3\mu^4 + 2\varphi_1{}^2\mu^4$$

$$+ 6\varphi_1 S_1\mu^4 + S_1{}^2\mu^4).$$

Der Vergleich gleich hoher Potenzen von μ liefert für die S_i und φ_i die Differentialgleichungen

C) $$\frac{dS_1}{dH}=\frac{3}{2}\sin 2H \quad \frac{dS_2}{dH}=\frac{3}{2}\sin 2H \quad \frac{dS_3}{dH}=\frac{3}{2}\sin 2H(1+4\varphi_1+3S_1)$$

D) $$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_1}{dH^2}+\varphi_1=\dfrac{1}{2}-2S_1+\dfrac{3}{2}\cos 2H \qquad \dfrac{d^2\varphi_2}{dH^2}+\varphi_2=2\dfrac{d^2\varphi_1}{dH^2}-2S_2 \\ \dfrac{d^2\varphi_3}{dH^2}+\varphi_3=2\dfrac{d^2\varphi_2}{dH^2}-\dfrac{d^2\varphi_1}{dH^2}-\varphi_1\dfrac{d^2\varphi_1}{dH^2}+2\left(\dfrac{d\varphi_1}{dH}\right)^2+\dfrac{3}{2}\dfrac{d\varphi_1}{dH}\sin 2H \\ +(6\varphi_1+2S_1)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\cos 2H\right)-(2S_3+2\varphi_1{}^2+6\varphi_1 S_1+S_1{}^2). \end{cases}$$

Die Gleichungen (C) und (D) können elementar integriert werden. Aus den beiden ersten Gleichungen (C) folgt sofort

a) $$S_1=\alpha_1-\frac{3}{4}\cos 2H \qquad S_2=\alpha_2-\frac{3}{4}\cos 2H,$$

wenn α_1 und α_2 die Integrationskonstanten sind. Mit dem Werte von S_1 läßt sich die erste Gleichung (D) integrieren. Man findet

b) $$\varphi_1=-2\alpha_1+\frac{1}{2}-\cos 2H.$$

Nun ist die Integration der dritten Gleichung (C) und der zweiten Gleichung (D) möglich; sie gibt

c) $$S_3=\alpha_3-\left(\frac{9}{4}-\frac{15}{4}\alpha_1\right)\cos 2H+\frac{75}{64}\cos 4H \quad \varphi_2=-2\alpha_2-\frac{19}{6}\cos 2H.$$

Mit den Werten (a, b, c) kann man schließlich die Gleichung für φ_3 aufstellen und integrieren. Man erhält

d) $$\varphi_3=3\alpha_1{}^2-4\alpha_1-2\alpha_3-\frac{21}{32}-\left(\frac{173}{18}-8\alpha_1\right)\cos 2H+\cos 4H.$$

Damit sind alle Koeffizienten des Ansatzes (10) bestimmt. Für die Funktionen S und φ hat man so die Werte gefunden

$$S=(\alpha_1\mu^2+\alpha_2\mu^3+\alpha_3\mu^4)-\left(\frac{3}{4}\mu^2+\frac{3}{4}\mu^3+\frac{9}{4}\mu^4-\frac{15}{4}\alpha_1\mu^4\right)\cos 2H$$
$$+\frac{75}{64}\mu^4\cos 4H$$

$$\varphi = -2(a_1\mu^2 + a_2\mu^3 + a_3\mu^4) + \left(\frac{1}{2}\mu^2 - \frac{21}{32}\mu^4 + 3a_1^2\mu^4 - 4a_1\mu^4\right)$$
$$-\left(\mu^2 + \frac{19}{6}\mu^3 + \frac{173}{18}\mu^4 - 8a_1\mu^4\right)\cos 2H + \mu^4\cos 4H.$$

Setzt man zur Abkürzung noch $a_1\mu^2 + a_2\mu^3 + a_3\mu^4 = \alpha$, dann ist in der betrachteten Annäherung $a_1\mu^4 = \mu^2\alpha$ und $a_1^2\mu^4 = \alpha^2$, und man erhält nun für S und φ die Ausdrücke

$$(11)\quad \begin{cases} S = \alpha - \left(\frac{3}{4}\mu^2 + \frac{3}{4}\mu^3 + \frac{9}{4}\mu^4 - \frac{15}{4}\mu^2\alpha\right)\cos 2H + \frac{75}{64}\mu^4\cos 4H \\ \varphi = -2\alpha + \left(\frac{1}{2}\mu^2 - \frac{21}{32}\mu^4 + 3\alpha^2 - 4\mu^2\alpha\right) \\ \qquad -\left(\mu^2 + \frac{19}{6}\mu^3 + \frac{173}{18}\mu^4 - 8\mu^2\alpha\right)\cos 2H + \mu^4\cos 4H. \end{cases}$$

Unter α hat man also jetzt die Integrationskonstante der Differentialgleichung für S aufzufassen, die somit von der Ordnung μ^2 ist, was man im folgenden zu beachten hat.

5. Der erste Teil der Integration des Systems (9) ist damit erledigt: Die zweite Lösung (11) bestimmt bis auf die noch unbekannte Integrationskonstante α die Bahn des Mondes als Funktion des Winkels H. Um seine Bewegung in Abhängigkeit von der Zeit t zu ermitteln, ist noch die letzte Gleichung (9) für $\frac{dH}{dt}$ zu integrieren. Bei Berücksichtigung aller Glieder bis μ^4 vereinfacht sie sich zu

$$\frac{dH}{dt} = n[-\mu + (1 + 2\varphi + S + \varphi^2 + 2\varphi S)^{-1}]$$
$$= n[1 - \mu - 2\varphi - S + 3\varphi^2 + 2\varphi S + S^2]$$

und lautet mit den Werten (11) für die Funktionen φ und S

$$(9\,\text{a})\quad \begin{cases} \frac{dH}{dt} = n\Big[1 - \mu - \mu^2 + 3\alpha + 3\alpha^2 + 3\mu^2\alpha + \frac{147}{32}\mu^4 \\ + \left(\frac{11}{4}\mu^2 + \frac{85}{12}\mu^3 + \frac{319}{18}\mu^4 - \frac{33}{4}\mu^2\alpha\right)\cos 2H - \frac{41}{64}\mu^4\cos 4H\Big]. \end{cases}$$

In einer ersten Annäherung ($\mu^2 = 0$) und unter der Annahme, daß für $t = 0$ auch $v = v_1 = 0$ und also auch $H = 0$ ist, wird $H = n(1 - \mu)t$. Damit kann man in einer zweiten Näherung ($\mu^4 = 0$) die rechte Seite von (9a) bilden. Die Integration gibt dann für $H = v - v_1$, wo jetzt $v_1 = n_1 t = n\mu t$ ist,

$$v - v_1 = H = n(1 - \mu - \mu^2 + 3a)t + \frac{1}{2(1-\mu)}\left(\frac{11}{4}\mu^2 + \frac{85}{12}\mu^3\right)\sin[2n(1-\mu)t].$$

An dieser Stelle soll etwas über die Integrationskonstante a der Differentialgleichung für S festgestellt werden: Der Radius a der Bezugsbahn sollte nach Definition einen bestimmten Wert haben, nämlich den Wert des Radiusvektors r des Mondes für $\mu = 0$ und $e = 0$. Man könnte aber auch die Bewegung des Mondes in bezug auf einen anderen Kreis beschreiben, d. h. den Radius a der Bezugsbahn noch in gewisser Weise als beliebig wählbar ansehen. Statt für a einen bestimmten Wert festzusetzen, wollen wir der Integrationskonstanten a einen geeigneten Wert beilegen und dafür a in gewissem Sinne als Integrationskonstante auffassen. a soll einen solchen Wert haben, daß die mittlere gestörte Bewegung des Mondes, also der Koeffizient von t im Ausdruck für v, gleich der mittleren Bewegung n in der (ungestörten) Kreisbahn ist. Dazu muß in der betrachteten Annäherung ($\mu^4 = 0$) $-\mu^2 + 3a = 0$, also $a = \frac{1}{3}\mu^2$ sein. Durch diese Festsetzung ist dann, da μ nach (2) von a abhängt, der Radius a der Bezugsbahn festgelegt. Für H erhält man bei dieser neuen Definition der Bezugsbahn

$$v - v_1 = H = n(1 - \mu)t + \left(\frac{11}{8}\mu^2 + \frac{59}{12}\mu^3\right)\sin[2n(1-\mu)t].$$

Diesen Näherungswert kann man jetzt auf der rechten Seite von (9a) benutzen, um diese Gleichung mit allen Gliedern zu integrieren. a kann dabei in den Gliedern von der Ordnung μ^4 durch seinen Näherungswert $\frac{1}{3}\mu^2$ ersetzt werden. Man erhält so für (9a)

$$\frac{dH}{dt}=n\Big\{1-\mu-\mu^2+3\alpha+\frac{569}{96}\mu^4+\Big(\frac{11}{4}\mu^2+\frac{85}{12}\mu^3 + \frac{539}{36}\mu^4\Big)\cos\Big[2\xi+\frac{11}{4}\mu^2\sin 2\xi\Big]-\frac{41}{64}\mu^4\cos 4\xi\Big\},$$

wo $\xi=n(1-\mu)t$ ist. Wendet man auf das erste Kosinusglied das Additionstheorem für $\cos(x+y)$ mit $x=2\xi$ an und berücksichtigt man die Kleinheit von y, dann wird

$$\frac{dH}{dt}=n\Big[1-\mu-\mu^2+3\alpha+\frac{103}{48}\mu^4 + \Big(\frac{11}{4}\mu^2+\frac{85}{12}\mu^3+\frac{539}{36}\mu^4\Big)\cos 2\xi+\frac{201}{64}\mu^4\cos 4\xi\Big],$$

also

$$H=n\Big(1-\mu-\mu^2+3\alpha+\frac{103}{48}\mu^4\Big)t + \Big(\frac{11}{8}\mu^2+\frac{59}{12}\mu^3+\frac{893}{72}\mu^4\Big)\sin 2\xi+\frac{201}{256}\mu^4\sin 4\xi.$$

Die Integrationskonstante ist jetzt genauer durch die Forderung $3\alpha-\mu^2+\frac{103}{48}\mu^4=0$, also zu $\alpha=\frac{1}{3}\mu^2-\frac{103}{144}\mu^4$ bestimmt, und man erhält damit für S und φ in (11) und für H die endgültigen Werte

$$(12)\quad\begin{cases} S=\frac{1}{3}\mu^2-\frac{103}{144}\mu^4-\Big(\frac{3}{4}\mu^2+\frac{3}{4}\mu^3+\mu^4\Big)\cos 2H+\frac{75}{64}\mu^4\cos 4H \\ \varphi=-\frac{1}{6}\mu^2-\frac{65}{288}\mu^4-\Big(\mu^2+\frac{19}{6}\mu^3+\frac{125}{18}\mu^4\Big)\cos 2H + \mu^4\cos 4H \\ v-v_1=H=n(1-\mu)t+\Big(\frac{11}{8}\mu^2+\frac{59}{12}\mu^3+\frac{893}{72}\mu^4\Big)\sin[2n(1-\mu)t] + \frac{201}{256}\mu^4\sin[4n(1-\mu)t]. \end{cases}$$

Die Gleichungen (12) stellen die Variation dar, also die allein von μ abhängigen Mondstörungen, die bis auf das schon in der ungestörten Bewegung vorkommende Glied nt in H mit der Störung, also mit μ verschwinden.

II.

1. Die Gleichungen (9) des ersten Kapitels, die die auch von e abhängigen Mondstörungen bestimmen, sind dort unter der vereinfachenden Annahme integriert worden, daß die ungestörte Mondbahn ein Kreis, also die Exzentrizität $e = 0$ ist. Das Ergebnis waren die mit Variation bezeichneten Mondstörungen (I, 12). Im Anschluß an diese Untersuchungen über die Variation ist es nun möglich, die Gleichungen (9) auch für den Fall zu integrieren, daß die ungestörte Mondbahn kein Kreis, sondern eine Keplerellipse mit der Exzentrizität e ist. Bei dieser der Wirklichkeit entsprechenden Annahme über die ungestörte Mondbahn müssen daher die Funktionen φ und S noch Glieder mit der Mondexzentrizität e enthalten. Versteht man von nun an unter $\varphi(\mu)$ und $S(\mu)$ die allein die Variation (I, 12) bestimmenden Variablen, so müssen jetzt zu diesen Funktionen noch Größen treten, ich bezeichne sie mit $\Delta\varphi$ und ΔS, die beide die Exzentrizität enthalten und mit ihr verschwinden. Die Funktionen $\varphi(\mu, e)$ und $S(\mu, e)$ in (I, 4), für die das Gleichungssystem (I, 9) aufgestellt worden ist, sind also jetzt durch die Funktionen $\varphi(\mu) + \Delta\varphi(\mu, e)$ und $S(\mu) + \Delta S(\mu, e)$ zu ersetzen, die demnach ebenfalls Lösungen der Gleichungen (I, 9) und zur Variation $\varphi(\mu)$ und $S(\mu)$ benachbart sind. Das gibt eine Möglichkeit, aus (I, 9) Differentialgleichungen für die Funktionen $\Delta\varphi$ und ΔS aufzustellen, die man nach Poincaré die «Equations aux Variations», die Variationsgleichungen des Systems (I, 9) nennt. Die Variation $\varphi(\mu)$ und $S(\mu)$ ist ihre „Erzeugende". Man erhält die Variationsgleichungen, wenn man in den Differentialgleichungen also

(1) $\qquad \varphi = \varphi(\mu) + \Delta\varphi(\mu, e) \qquad\qquad S = S(\mu) + \Delta S(\mu, e)$

setzt und beachtet, daß die Variation $\varphi(\mu)$ und $S(\mu)$ für sich schon eine Lösung der Gleichungen (I, 9) ist.

2. Setzt man die Nachbarlösung (1) in die erste Gleichung (I, 9) ein und entwickelt man die rechte Seite nach Taylor, dann erhält man, wenn man Glieder 2. Ordnung in $\Delta\varphi$ und ΔS vernachlässigt, sich also auf Glieder mit der ersten Potenz von e beschränkt,

$$\frac{dS}{dH}+\frac{d\Delta S}{dH}=\left(\frac{dS}{dH}\right)_0+\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{dS}{dH}\right)\right]_0\Delta\varphi+\left[\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{dS}{dH}\right)\right]_0\Delta S.$$

Der Index o soll immer andeuten, daß $\Delta\varphi$ und ΔS Null zu setzen sind. Man findet so (N = Nenner)

$$\frac{d\Delta S}{dH}=\frac{3}{2}\mu^2\sin 2H\Big\{\Delta\varphi\cdot\frac{1}{N^2}[4N(1+\varphi)^3(1+S)^3+2\mu(1+\varphi)^5(1+S)^4]$$
$$+\Delta S\cdot\frac{1}{N^2}[3N(1+\varphi)^4(1+S)^2+\mu(1+\varphi)^6(1+S)^3]\Big\}$$

(2a)
$$\begin{cases}=\dfrac{3}{2}\mu^2\sin 2H\Big\{\Delta\varphi\,\dfrac{(1+\varphi)^3(1+S)^3}{1-\mu(1+\varphi)^2(1+S)}\left[4+\dfrac{2\mu(1+\varphi)^2(1+S)}{1-\mu(1+\varphi)^2(1+S}\right]\\ +\Delta S\,\dfrac{(1+\varphi)^4(1+S)^2}{1-\mu(1+\varphi)^2(1+S)}\left[3+\dfrac{\mu(1+\varphi)^2(1+S)}{1-\mu(1+\varphi)^2(1+S)}\right]\Big\}.\end{cases}$$

Das ist die Differentialgleichung für ΔS. Sie gilt streng, wenn man in $\Delta\varphi$ und ΔS Glieder mit e^2 nicht berücksichtigt.

Zur Aufstellung der Variationsgleichung für $\Delta\varphi$ benötigt man den Wert von $\dfrac{dH}{dv}$ für die Nachbarlösung (1). Die Taylorsche Entwicklung der dritten Gleichung (I, 9) gibt dafür

$$\frac{dH}{dv}=\left(\frac{dH}{dv}\right)_0+\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{dH}{dv}\right)\right]_0\Delta\varphi+\left[\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{dH}{dv}\right)\right]_0\Delta S$$

A)
$$\begin{cases}=\left(\dfrac{dH}{dv}\right)_0-\mu[2(1+\varphi)(1+S)\Delta\varphi+(1+\varphi)^2\Delta S]\\ \text{und }\left(\dfrac{dH}{dv}\right)^2=\left(\dfrac{dH}{dv}\right)_0^2-2\mu\left(\dfrac{dH}{dv}\right)_0[2(1+\varphi)(1+S)\Delta\varphi+(1+\varphi)^2\Delta S]\end{cases}$$

Nun kann man mit (1) in die zweite Gleichung (I, 9) eingehen:

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dH^2}+\frac{d^2\Delta\varphi}{dH^2}\right)(1+\varphi+\Delta\varphi)\left(\frac{dH}{dv}\right)^2=2\left(\frac{d\varphi}{dH}+\frac{d\Delta\varphi}{dH}\right)^2\frac{dH}{dv}$$
$$+\frac{3}{2}\mu^2(1+\varphi+\Delta\varphi)^5(1+S+\Delta S)^2\left(\frac{d\varphi}{dH}+\frac{d\Delta\varphi}{dH}\right)\sin 2H$$
$$+\mu^2(1+\varphi+\Delta\varphi)^6(1+S+\Delta S)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2H\right)$$
$$-(1+\varphi+\Delta\varphi)^2\{(1+\varphi+\Delta\varphi)(1+S+\Delta S)^2-1\}.$$

Benutzt man die Beziehungen (A) und entwickelt man die Klammern, dann wird hieraus

$$\underline{\frac{d^2\varphi}{dH^2}(1+\varphi)\left(\frac{dH}{dv}\right)_0^2}+\frac{d^2\varphi}{dH^2}(1+\varphi)\Big\{-2\mu\left(\frac{dH}{dv}\right)_0[2(1+\varphi)(1+S)\Delta\varphi$$
$$+(1+\varphi)^2\Delta S]\Big\}+\frac{d^2\varphi}{dH^2}\Delta\varphi\left(\frac{dH}{dv}\right)_0^2+\frac{d^2\Delta\varphi}{dH^2}(1+\varphi)\left(\frac{dH}{dv}\right)_0^2$$
$$=\underline{2\left(\frac{d\varphi}{dH}\right)^2\left(\frac{dH}{dv}\right)_0}+2\left(\frac{d\varphi}{dH}\right)^2\{-2\mu(1+\varphi)(1+S)\Delta\varphi$$
$$-\mu(1+\varphi)^2\Delta S\}+4\frac{d\varphi}{dH}\frac{d\Delta\varphi}{dH}\left(\frac{dH}{dv}\right)_0$$
$$+\underline{\frac{3}{2}\mu^2(1+\varphi)^5(1+S)^2\sin 2H\left(\frac{d\varphi}{dH}+\frac{d\Delta\varphi}{dH}\right)}$$
$$+\frac{3}{2}\mu^2\{5(1+\varphi)^4(1+S)^2\Delta\varphi+2(1+\varphi)^5(1+S)\Delta S\}\sin 2H\cdot\frac{d\varphi}{dH}$$
$$+\underline{\mu^2(1+\varphi)^6(1+S)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2H\right)}$$
$$+\mu^2\{6(1+\varphi)^5(1+S)^2\Delta\varphi+2(1+\varphi)^6(1+S)\Delta S\}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2H\right)$$
$$-\underline{(1+\varphi)^2\{(1+\varphi)(1+S)^2-1\}}-2(1+\varphi)\Delta\varphi\{(1+\varphi)(1+S)^2-1\}$$
$$-(1+\varphi)^2\{(1+S)^2\Delta\varphi+2(1+\varphi)(1+S)\Delta S\}.$$

Da die Variation φ und S selbst eine Lösung des Systems (I, 9) ist, fallen die unterstrichenen Glieder weg. Es bleibt, wenn man nach $\frac{d\Delta\varphi}{dH}$, $\Delta\varphi$ und ΔS ordnet, für $\Delta\varphi$ die endgültige Gleichung

$$
\text{(2b)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{d^2\Delta\varphi}{dH^2}(1+\varphi)\left(\dfrac{dH}{dv}\right)_0^2=\dfrac{d\Delta\varphi}{dH}\left[\dfrac{3}{2}\mu^2(1+\varphi)^5(1+S)^2\sin 2H\right.\\
\quad\left.+4\,\dfrac{d\varphi}{dH}\left(\dfrac{dH}{dv}\right)_0\right]+\Delta\varphi\left\{2(1+\varphi)-3(1+\varphi)^2(1+S)^2\right.\\
\quad+6\mu^2(1+\varphi)^5(1+S)^2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\cos 2H\right)+\dfrac{d^2\varphi}{dH^2}\left[-\left(\dfrac{dH}{dv}\right)_0^2\right.\\
\quad\left.+4\mu(1+\varphi)^2(1+S)\left(\dfrac{dH}{dv}\right)_0\right]+\dfrac{15}{2}\mu^2\dfrac{d\varphi}{dH}(1+\varphi)^4(1+S)^2\sin 2H\\
\quad-4\mu\left(\dfrac{d\varphi}{dH}\right)^2(1+\varphi)(1+S)\left.\right\}+\Delta S\left\{-2(1+\varphi)^3(1+S)\right.\\
\quad+2\mu^2(1+\varphi)^6(1+S)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\cos 2H\right)+2\mu\dfrac{d^2\varphi}{dH^2}(1+\varphi)^3\left(\dfrac{dH}{dv}\right)_0\\
\quad\left.+3\mu^2\dfrac{d\varphi}{dH}(1+\varphi)^5(1+S)\sin 2H-2\mu\left(\dfrac{d\varphi}{dH}\right)^2(1+\varphi)^2\right\}.
\end{cases}
$$

Die vierte Gleichung (I, 9) wird mit dem Ansatz (1) zu

$$
\begin{aligned}
\frac{dH}{dt}&=\left(\frac{dH}{dt}\right)_0+\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{dH}{dt}\right)\right]_0\Delta\varphi+\left[\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{dH}{dt}\right)\right]_0\Delta S\\
&=n\left[\frac{1-\mu(1+\varphi)^2(1+S)}{(1+\varphi)^2(1+S)}-\frac{2\Delta\varphi}{(1+\varphi)^3(1+S)}-\frac{\Delta S}{(1+\varphi)^2(1+S)^2}\right].
\end{aligned}
\qquad\text{(2c)}
$$

Die drei Differentialgleichungen (2) beschreiben zusammen mit der Variation (I, 12) die Bewegung des Mondes für den Fall, daß seine ungestörte Bahn eine Ellipse mit der Exzentrizität e ist. (2a) und (2b) sind gleichwertig mit einem System von drei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Koeffizienten dieses Systems sind als Funktionen der Variation φ und S periodische Funktionen des Winkels H mit der Periode $H=\pi$. Diese Gleichungen bestimmen $\Delta\varphi$ und ΔS als Funktion von H und liefern die mit der ersten Potenz von e proportionalen Mondstörungen. Die dritte Gleichung (2) definiert dann H als Funktion von t. Damit ist auch $\Delta\varphi(t)$ und $\Delta S(t)$ bekannt. Die Integration geschieht dabei am bequemsten durch schrittweise Annäherung.

3. Aus (2a) folgt, daß die periodischen Glieder von ΔS von der Ordnung $\mu^2 \Delta\varphi$ sind. Ich nehme zunächst an, daß auch die Integrationskonstante dieser Gleichung von dieser Ordnung ist. Die Variation φ und S hat ebenfalls die Ordnung μ^2. In einer 1. Näherung ($\mu^2 = 0$) ist also $\Delta S = 0$ und für $\Delta\varphi$ ergibt sich aus (2b) die Gleichung

$$\frac{d^2 \Delta\varphi}{dH^2}(1-2\mu) + \Delta\varphi = 0,$$

die durch den Ansatz

a) $$\Delta\varphi = -A \cos w \qquad \text{mit } w = \frac{cH}{1-\mu} - B$$

befriedigt wird. A und B sind die Integrationskonstanten und c eine weitere Konstante, die in dieser Näherung gleich 1 sein muß. Zur Bestimmung von A und B betrachtet man die ungestörte (elliptische) Bewegung ($\mu = 0$), für welche nach (I, 4)

$$r = a(1 + \Delta\varphi) = a[1 - A \cos(v - B)]$$

ist. (Für $\mu = 0$ ist ja $v_1 = n_1 t = n\mu t = 0$, also $H = v$ und wegen $c = 1$ deshalb $w = v - B$.) Andrerseits ist der Radiusvektor der Bahnellipse

$$r = a\frac{1-e^2}{1+e\cos(v-\pi_0)} = a[1 - e\cos(v-\pi_0) + - \cdots],$$

wo π_0 die Länge des Perihels bezeichnet. Der Vergleich der beiden Ausdrücke für r liefert $A = e$ und $B = \pi_0$. In 1. Annäherung ist also

(3) $$\Delta S = 0 \qquad \Delta\varphi = -e\cos w \qquad w = \frac{cH}{1-\mu} - \pi_0 \qquad c = 1.$$

4. In der 2. Annäherung ($\mu^3 = 0$), die hier als Beispiel ausführlicher durchgerechnet wird, vereinfachen sich die beiden ersten Gleichungen (2) zu

(4)
$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta S}{dH} = \dfrac{3}{2}\mu^2 \sin 2H \cdot 4\Delta\varphi \\ \dfrac{d^2\Delta\varphi}{dH^2}[(1-\mu)^2 + \varphi] = \dfrac{d\Delta\varphi}{dH}\left[\dfrac{3}{2}\mu^2 \sin 2H + 4\dfrac{d\varphi}{dH}\right] \\ \qquad - \Delta\varphi\left[1 - 3\mu^2 - 9\mu^2\cos 2H + 4\varphi + 6S + \dfrac{d^2\varphi}{dH^2}\right] - 2\Delta S. \end{cases}$$

Zur Integration der Gleichung für ΔS kann für $\Delta\varphi$ der Näherungswert (3) benutzt werden. Damit wird

$$\frac{d\,\Delta S}{dH} = -3\mu^2 e\,[\sin(2H - w) + \sin(2H + w)]$$

$$(4\,a)\quad \begin{cases} \text{und} & \Delta S = e\alpha + 3\mu^2 e\cos(2H - w) + \mu^2 e\cos(2H + w) \\ \text{mit} & w = \dfrac{c\,H}{1-\mu} - \pi_0\,, \end{cases}$$

wenn $e\alpha$ die Integrationskonstante ($\alpha \approx \mu^2$) ist, die proportional mit e sein muß, da ΔS mit der Exzentrizität verschwindet.

In der zweiten Gleichung (4) hat man für die Variation φ und S ihre Werte (I, 12) einzusetzen. Das gibt

$$\frac{d^2\,\Delta\varphi}{dH^2}\left[(1-\mu)^2 - \frac{1}{6}\mu^2 - \mu^2\cos 2H\right]$$

$$= \frac{d\,\Delta\varphi}{dH}\cdot\frac{19}{2}\mu^2\sin 2H - \Delta\varphi\left[1 - \frac{5}{3}\mu^2 - \frac{27}{2}\mu^2\cos 2H\right] - 2\,\Delta S.$$

Für $\Delta\varphi$ kann man hier in den Gliedern von der Ordnung μ^2 seinen Näherungswert (3) benutzen, für ΔS den Wert (4a). Trigonometrische Produkte werden dabei mit Hilfe der Additionstheoreme umgeformt:

$$\frac{d^2\,\Delta\varphi}{dH^2}(1-\mu)^2 - \frac{1}{6}\mu^2 e\cos w - \frac{1}{2}\mu^2 e\,[\cos(2H - w) + \cos(2H + w)]$$

$$= \frac{19}{4}\mu^2 e\,[\cos(2H - w) - \cos(2H + w)] - \Delta\varphi - \frac{5}{3}\mu^2 e\cos w$$

$$- \frac{27}{4}\mu^2 e\,[\cos(2H - w) + \cos(2H + w)] - 2e\alpha$$

$$- 6\mu^2 e\cos(2H - w) - 2\mu^2 e\cos(2H + w)$$

$$\frac{d^2\,\Delta\varphi}{dH^2}(1-\mu)^2 + \Delta\varphi = -2e\alpha - \frac{3}{2}\mu^2 e\cos w - \frac{15}{2}\mu^2 e\cos(2H - w)$$

$$- 13\,\mu^2 e\cos(2H + w)\,.$$

Mit Berücksichtigung der Näherung (3) kann man als Lösung

$$\text{b)}\quad \Delta\varphi = eb_0 - e(1 + b^*)\cos w + eb_1\cos(2H - w) + eb_2\cos(2H + w)$$

ansetzen. Bildet man

$$\frac{d^2 \Delta\varphi}{dH^2}(1-\mu)^2 = e(1+b^*)c^2\cos w - eb_1(2-2\mu-c)^2\cos(2H-w) - eb_2(2-2\mu+c)^2\cos(2H+w),$$

dann erhält man beim Einsetzen in die Differentialgleichung für $\Delta\varphi$ die Gleichung

$$\begin{aligned}0 = {} & e(1+b^*)c^2\cos w - eb_1(2-2\mu-c)^2\cos(2H-w) \\ & - eb_2(2-2\mu+c)^2\cos(2H+w) \\ & + eb_0 - e(1+b^*)\cos w + eb_1\cos(2H-w) + eb_2\cos(2H+w) \\ & + 2ea + \frac{3}{2}\mu^2 e\cos w + \frac{15}{2}\mu^2 e\cos(2H-w) + 13\mu^2 e\cos(2H+w).\end{aligned}$$

Sie bestimmt die Koeffizienten des Ansatzes (b). Der Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen

$$0 = b_0 + 2a \qquad 0 = (1+b^*)c^2 - (1+b^*) + \frac{3}{2}\mu^2$$

$$0 = -b_1(2-2\mu-c)^2 + b_1 + \frac{15}{2}\mu^2 \qquad 0 = -b_2(2-2\mu+c)^2 + b_2 + 13\mu^2.$$

Beachtet man in der zweiten Gleichung, daß b^* mit μ proportional sein muß und benutzt man in den beiden letzten Gleichungen den Näherungswert $c=1$, dann sind die Lösungen

$$b_0 = -2a \qquad c = 1 - \frac{3}{4}\mu^2 \qquad b^* = \text{unbestimmt}$$

$$b_1 = -\frac{15}{8}\mu \qquad b_2 = \frac{13}{8}\mu^2.$$

In der Gleichung für b_1 tritt der kleine Divisor μ auf: Der Koeffizient der wichtigsten, von e abhängigen Mondstörung, der sogenannten Evektion, wird deshalb immer um eine Ordnung weniger genau als die anderen Koeffizienten. $\Delta\varphi$ hat damit den Wert

$$\text{(4b)} \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta\varphi = {} & -2ea - e(1+b^*)\cos w - \frac{15}{8}\mu e\cos(2H-w) \\ & + \frac{13}{8}\mu^2 e\cos(2H+w) \\ w = {} & \frac{cH}{1-\mu} - \pi_0 \qquad c = 1 - \frac{3}{4}\mu^2. \end{aligned} \right.$$

5. Berücksichtigt man in einer 3. Annäherung noch alle Glieder mit μ^3, dann lauten die Gleichungen (2a) und (2b)

$$(5)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{d\,\Delta S}{d\,H}=\dfrac{3}{2}\,\mu^2 \sin 2H\cdot(4+6\,\mu)\,\Delta\varphi \\ \dfrac{d^2\,\Delta\varphi}{d\,H^2}\,[(1-\mu)^2+\varphi-6\,\mu\,\varphi-2\,\mu\,S] \\ \qquad =\dfrac{d\,\Delta\varphi}{d\,H}\left[\dfrac{3}{2}\,\mu^2 \sin 2H+4\,(1-\mu)\,\dfrac{d\,\varphi}{d\,H}\right] \\ -\Delta\varphi\left[1-3\,\mu^2-9\,\mu^2\cos 2H+4\,\varphi+6\,S+(1-6\,\mu)\,\dfrac{d^2\,\varphi}{d\,H^2}\right]-2\,\Delta S. \end{array}\right.$$

Mit (4b) und weil $\alpha \approx \mu^2$ wird die erste Gleichung (5)

$$\frac{d\,\Delta S}{d\,H}=-\frac{45}{8}\,\mu^3 e \sin w-\left(3\,\mu^2+\frac{9}{2}\,\mu^3\right)e\left[\sin(2H-w)+\sin(2H+w)\right]$$
$$-\frac{45}{8}\,\mu^3 e \sin(4H-w),$$

$$(5\,a)\quad \left|\begin{array}{l} \text{also}\quad \Delta S=e\,\alpha+\dfrac{45}{8}\,\mu^3 e\cos w+\left(3\,\mu^2+\dfrac{15}{2}\,\mu^3\right)e\cos(2H-w) \\ \qquad +\left(\mu^2+\dfrac{7}{6}\,\mu^3\right)e\cos(2H+w)+\dfrac{15}{8}\,\mu^3 e\cos(4H-w). \end{array}\right.$$

Für die zweite Gleichung (5) erhält man mit den Werten für die Variation und den bisherigen Näherungswerten für $\Delta\varphi$ und ΔS die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\,\Delta\varphi}{d\,H^2}(1-\mu)^2+\Delta\varphi=-2\,e\,\alpha-\left(\frac{3}{2}\,\mu^2+\frac{225}{16}\,\mu^3\right)e\cos w$$
$$-\left(\frac{15}{2}\,\mu^2+\frac{317}{16}\,\mu^3\right)e\cos(2H-w)$$
$$-\left(13\,\mu^2+\frac{187}{6}\,\mu^3\right)e\cos(2H+w)-\frac{195}{8}\,\mu^3 e\cos(4H-w).$$

Der Ansatz

$$c)\qquad \Delta\varphi=e\,b_0-e\,(1+b^*)\cos w+e\,b_1\cos(2H-w)$$
$$+e\,b_2\cos(2H+w)+e\,b_3\cos(4H-w)$$

führt beim Einsetzen zu der Bestimmungsgleichung

$$\text{d)}\quad \begin{cases} 0 = & (1+b^*)\,e\,c^2\cos w & -e\,b_1\,(2-2\mu-c)^2\cos(2H-w) \\ & -e\,b_2\,(2-2\mu+c)^2\cos(2H+w) & -e\,b_3\,(4-4\mu-c)^2\cos(4H-w) \\ & +e\,b_0-(1+b^*)\,e\cos w & +e\,b_1\cos(2H-w) \\ & +e\,b_2\cos(2H+w) & +e\,b_3\cos(4H-w) \\ & +2\,e\,a+\left(\frac{3}{2}\mu^2+\frac{225}{16}\mu^3\right)e\cos w+\left(\frac{15}{2}\mu^2+\frac{317}{16}\mu^3\right)e\cos(2H-w) \\ & +\left(13\,\mu^2+\frac{187}{6}\mu^3\right)e\cos(2H+w)+\frac{195}{8}\mu^3 e\cos(4H-w). \end{cases}$$

Diese zerfällt in fünf Gleichungen für die sechs Konstanten c, b^*, b_0, b_1, b_2, b_3. Die Konstante b^*, die von der Ordnung μ^2 ist[1]), ist wieder unbestimmbar; für die anderen findet man die Werte

$$c=1-\frac{3}{4}\mu^2-\frac{225}{32}\mu^3 \qquad b_0=-2\,a$$

$$b_1=-\left(\frac{15}{8}\mu+\frac{241}{32}\mu^2\right) \qquad b_2=\frac{13}{8}\mu^2+\frac{19}{3}\mu^3 \qquad b_3=\frac{195}{64}\mu^3.$$

Der Ansatz (c) lieferte somit die Lösung

$$\text{(5b)}\quad \begin{cases} \Delta\varphi=-2\,e\,a-e\,(1+b^*)\cos w-\left(\frac{15}{8}\mu+\frac{241}{32}\mu^2\right)e\cos(2H-w) \\ \qquad +\left(\frac{13}{8}\mu^2+\frac{19}{3}\mu^3\right)e\cos(2H+w)+\frac{195}{64}\mu^3 e\cos(4H-w) \\ \qquad \text{mit}\quad w=\frac{c\,H}{1-\mu}-\pi_0 \qquad c=1-\frac{3}{4}\mu^2-\frac{225}{32}\mu^3. \end{cases}$$

---

[1]) Das ergibt sich später aus den Untersuchungen in Nr. 8. Diese sind schon vor Nr. 5 möglich, werden aber wegen der übersichtlicheren Darstellung erst dort gebracht.

6. In 4. Annäherung ($\mu^5 = 0$) schließlich lautet (2a) und (2b)

$$
(6)\quad
\begin{cases}
\dfrac{d\Delta S}{dH} = \dfrac{3}{2}\mu^2 \sin 2H \cdot [\Delta\varphi\,(4+6\mu+8\mu^2+12\varphi+12S)+3\Delta S] \\
\dfrac{d^2\Delta\varphi}{dH^2}[(1-\mu)^2+\varphi-6\mu\varphi-2\mu S+5\mu^2\varphi+2\mu^2 S] \\
= \dfrac{d\Delta\varphi}{dH}\left[\dfrac{3}{2}\mu^2(1+5\varphi+2S)\sin 2H+(4-4\mu)\dfrac{d\varphi}{dH}\right] \\
-\Delta\varphi\Big[1-3\mu^2+4\varphi+6S+3\varphi^2+12\varphi S+3S^2-15\mu^2\varphi \\
-6\mu^2 S-(9\mu^2+45\mu^2\varphi+18\mu^2 S)\cos 2H+\dfrac{d^2\varphi}{dH^2}(1-6\mu+5\mu^2) \\
-\dfrac{15}{2}\mu^2\dfrac{d\varphi}{dH}\sin 2H\Big]-\Delta S[2-\mu^2+6\varphi+2S-3\mu^2\cos 2H].
\end{cases}
$$

Aus ihnen sollen in dieser Näherung nur noch die wichtigsten Störungen berechnet werden; das sind die Evektion und die Konstante c der mittleren Bewegung des Perihels (Nr. 7). Für die Berechnung der Evektion braucht man von (6) die Glieder mit dem Argument $2H - w$; die Konstante c ergibt sich aus dem Koeffizienten von $\cos w$ in der Differentialgleichung für $\Delta\varphi$. Alle Glieder der Gleichungen (6) mit den Argumenten w und $2H - w$ müssen also bis μ^4 angegeben werden. Für ΔS erhält man so mit den Werten für die Variation und mit den Näherungen (5a, b) die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Delta S}{dH} = &-\left(\frac{45}{8}\mu^3+\frac{1005}{32}\mu^4\right)e\sin w \\
&-\left(3\mu^2+\frac{9}{2}\mu^3+\frac{15}{2}\mu^4+3\mu^2 b^*\right)e\sin(2H-w) \\
&-\left(3\mu^2+\frac{9}{2}\mu^3\right)e\sin(2H+w)-\frac{45}{8}\mu^3 e\sin(4H-w).
\end{aligned}
$$

Ihre Integration gibt in der angestrebten Genauigkeit

$$
(6\,\mathrm{a})\quad
\left|\begin{aligned}
\Delta S = {} & e\,a + \left(\frac{45}{8}\mu^3 + \frac{825}{32}\mu^4\right) e\cos w \\
& + \left(3\mu^2 + \frac{15}{2}\mu^3 + \frac{63}{4}\mu^4 + 3\mu^2 b^*\right) e\cos(2H - w) \\
& + \left(\mu^2 + \frac{7}{6}\mu^3\right) e\cos(2H + w) + \frac{15}{8}\mu^3 e\cos(4H - w) \\
& \qquad \text{mit } w = \frac{c\,H}{1-\mu} - \pi_0 .
\end{aligned}\right.
$$

Aus der zweiten Gleichung (6) findet man mit den Werten für φ und S und den Näherungswerten (6 a) für ΔS und (5 b) für $\Delta\varphi$ in der gewünschten Näherung nach einiger Rechnung die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\Delta\varphi}{dH^2}(1-\mu)^2 + \Delta\varphi = {} & -2\,e\,a \\
& - \left(\frac{3}{2}\mu^2 + \frac{225}{16}\mu^3 + \frac{4035}{64}\mu^4 + \frac{3}{2}\mu^2 b^*\right) e\cos w \\
& - \left(\frac{15}{2}\mu^2 + \frac{317}{16}\mu^3 + \frac{8509}{192}\mu^4 + \frac{15}{2}\mu^2 b^*\right) e\cos(2H - w) \\
& - \left(13\mu^2 + \frac{187}{6}\mu^3\right) e\cos(2H + w) - \frac{195}{8}\mu^3 e\cos(4H - w) .
\end{aligned}
$$

Zu ihrer Integration kann man nochmals den Ansatz (c) der dritten Näherung verwenden; nur ergeben sich jetzt für den Koeffizienten b_1 und die Konstante c genauere Werte. Die mit dem Ansatz (c) aus der Differentialgleichung für $\Delta\varphi$ entspringende, (d) entsprechende Gleichung liefert nun für c und b_1 die genaueren Gleichungen

$$
\begin{aligned}
0 &= (1 + b^*)\,c^2 - (1 + b^*) + \left(\frac{3}{2}\mu^2 + \frac{225}{16}\mu^3 + \frac{4035}{64}\mu^4 + \frac{3}{2}\mu^2 b^*\right) \\
0 &= -b_1(2 - 2\mu - c)^2 + b_1 + \left(\frac{15}{2}\mu^2 + \frac{317}{16}\mu^3 + \frac{8509}{192}\mu^4 + \frac{15}{2}\mu^2 b^*\right).
\end{aligned}
$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt die wichtige Konstante c:

$$c^2-1=-\left(\frac{3}{2}\mu^2+\frac{225}{16}\mu^3+\frac{4035}{64}\mu^4+\frac{3}{2}\mu^2 b^*\right)(1-b^*)$$

$$c^2=1-\frac{3}{2}\mu^2-\frac{225}{16}\mu^3-\frac{4035}{64}\mu^4$$

$$c=1-\frac{3}{4}\mu^2-\frac{225}{32}\mu^3-\frac{4071}{128}\mu^4. \tag{7}$$

Der Koeffizient b^* fällt in dieser Annäherung wieder heraus und bleibt weiter unbestimmt. Mit dem Werte von c ist die Lösung der zweiten Gleichung

$$b_1=-\left(\frac{15}{8}\mu+\frac{241}{32}\mu^2+\frac{40\,889}{1536}\mu^3+\frac{15}{8}\mu b^*\right).$$

Der gesuchte letzte Näherungswert von $\Delta\varphi$ lautet also

$$\left\{\begin{aligned}\Delta\varphi=&-2ea-e(1+b^*)\cos w\\&-\left(\frac{15}{8}\mu+\frac{241}{32}\mu^2+\frac{40\,889}{1536}\mu^3+\frac{15}{8}\mu b^*\right)e\cos(2H-w)\\&+\left(\frac{13}{8}\mu^2+\frac{19}{3}\mu^3\right)e\cos(2H+w)+\frac{195}{64}\mu^3 e\cos(4H-w)\\&\text{mit } w=\frac{cH}{1-\mu}-\pi_0 \quad \text{und } c=1-\frac{3}{4}\mu^2-\frac{225}{32}\mu^3-\frac{4071}{128}\mu^4.\end{aligned}\right. \tag{6 b}$$

7. Die in den Argumenten der Kosinusglieder vorkommende von μ abhängige Größe c bestimmt die mittlere Bewegung $\Delta\pi$ des Perihels der Mondbahn, das sich unter dem störenden Einfluß der Sonne im Mittel gleichförmig im positiven Sinne um die Erde bewegt. Diese wichtige säkulare Mondstörung geht nach der Gleichung

$$\Delta\pi=(1-c)\,nt. \tag{8}$$

Der in (7) angeführte analytische Ausdruck für c stimmt mit dem von Delaunay wie auch bei Andoyer angegebenen überein. Mit dem numerischen Werte 0,074 801 3 für den Parameter μ ist die Konstante c in (7) bis auf einen Fehler von -5% genau.

8. Die Integration der beiden Variationsgleichungen (2a, b) sei mit der Angabe der Näherungswerte (6a, b) abgeschlossen. Diese Lösungen bestimmen die Bahn des Mondes. Um seine Bewegung in Abhängigkeit von der Zeit zu ermitteln, ist noch die letzte Gleichung (2) zu integrieren. Der Winkel H soll dabei mit derselben Genauigkeit wie $\Delta\varphi$ in (6b) berechnet werden; alle Glieder mit $\mu^3 e$ sind dann mitzunehmen. Mit Rücksicht darauf lautet (2c)

$$\frac{dH}{dt} = n\frac{1-\mu(1+\varphi)^2(1+S)}{(1+\varphi)^2(1+S)} - n[2\Delta\varphi(1-3\varphi-S)+\Delta S].$$

Mit der Variation (I, 12) und mit (6a, b) für $\Delta\varphi$ und ΔS wird

$$\text{(9)}\quad \left|\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= n\left\{1-\mu+\frac{121}{32}\mu^4+\left(\frac{11}{4}\mu^2+\frac{85}{12}\mu^3+\frac{539}{36}\mu^4\right)\cos 2H\right.\\
&\qquad\left.-\frac{41}{64}\mu^4\cos 4H\right\}\\
&\quad+n\left\{3ea+2\left(1+\frac{1}{6}\mu^2+\frac{45}{64}\mu^3+b^*\right)e\cos w\right.\\
&\qquad+\left(\frac{15}{4}\mu+\frac{253}{16}\mu^2+\frac{43481}{768}\mu^3+\frac{15}{4}\mu b^*\right)e\cos(2H-w)\\
&\qquad\left.-\left(\frac{1}{2}\mu^2+\frac{43}{12}\mu^3\right)e\cos(2H+w)-\frac{15}{16}\mu^3 e\cos(4H-w)\right\}\\
w &= \frac{cH}{1-\mu}-\pi_0.
\end{aligned}\right.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt H und damit auch $v = H + v_1$, also die Länge des Mondes als Funktion der Zeit. Für verschwindende Exzentrizität e reduziert sich (9) auf die schon im ersten Kapitel integrierte Gleichung (I, 5), deren Lösung in (I, 12) zu

$$\text{(10)}\quad \left|\begin{aligned}
H = v - v_1 &= n(1-\mu)t+\left(\frac{11}{8}\mu^2+\frac{59}{12}\mu^3+\frac{893}{72}\mu^4\right)\sin 2\xi\\
&\quad+\frac{201}{256}\mu^4\sin 4\xi, \qquad \xi = n(1-\mu)t
\end{aligned}\right.$$

angegeben ist.

Die Gleichung (9) läßt sich leicht schrittweise integrieren. In ihren mit e proportionalen Gliedern kann in den Argumenten für H stets sein Variationswert (10) eingesetzt werden, da es auf Glieder mit e^2 nicht ankommt. In den beiden anderen, zur Variation führenden Kosinusgliedern müssen von H auch noch die mit e proportionalen Glieder berücksichtigt werden.

In 1. Näherung ($\mu^2 = 0$) lautet die Gleichung für H mit dem Näherungswert $H = n(1-\mu)t$ von (10) auf der rechten Seite

$$\frac{dH}{dt} = n(1-\mu) + n\left\{2e\cos(cnt - \pi_0) + \frac{15}{4}\mu e\cos[2n(1-\mu)t - cnt + \pi_0]\right\}.$$

Die Integration gibt die mit t verschwindende Lösung

e)
$$\left\{\begin{aligned} H &= n(1-\mu)t + 2e\sin\Phi + \frac{15}{4}\mu e\sin(2\xi - \Phi) \\ \xi &= n(1-\mu)t, \qquad \Phi = cnt - \pi_0. \end{aligned}\right.$$

In der 2. Annäherung ($\mu^3 = 0$) vereinfacht sich (9) zu

$$\frac{dH}{dt} = n\left\{1 - \mu + \frac{11}{4}\mu^2\cos 2H + 3ea + 2\left(1 + \frac{\mu^2}{6} + b^*\right)e\cos\left(\frac{cH}{1-\mu} - \pi_0\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{15}{4}\mu + \frac{253}{16}\mu^2\right)e\cos\left(2H - \frac{cH}{1-\mu} + \pi_0\right) - \frac{1}{2}\mu^2 e\cdot\cos\left(2H + \frac{cH}{1-\mu} - \pi_0\right)\right\}.$$

Um hieraus alle Glieder mit $\mu^2 e$ zu erhalten, muß man rechts für H die Lösung (e), vermehrt um das Variationsglied $+\frac{11}{8}\mu^2\sin 2\xi$ als Annäherung benutzen. Man findet dann bei Beachtung der Ordnung von c und mit den Additionstheoremen

$$\frac{dH}{dt} = n\left\{1 - \mu + 3ea + \frac{11}{4}\mu^2\cos 2\xi + 2\left(1 + \frac{\mu^2}{6} + b^*\right)e\cos\Phi\right.$$
$$\left. + \left(\frac{15}{4}\mu + \frac{143}{16}\mu^2\right)e\cos(2\xi - \Phi) + \frac{51}{8}\mu^2 e\cos(2\xi + \Phi)\right\},$$

f)
$$\left\{\begin{aligned} \text{also } H &= n(1 - \mu + 3ea)t + \frac{11}{8}\mu^2\sin 2\xi + 2\left(1 + \frac{11}{12}\mu^2 + b^*\right)e\sin\Phi \\ &+ \left(\frac{15}{4}\mu + \frac{263}{16}\mu^2\right)e\sin(2\xi - \Phi) + \frac{17}{8}\mu^2 e\sin(2\xi + \Phi). \end{aligned}\right.$$

Nun läßt sich die in H auftretende Integrationskonstante ea bestimmen. Aus dem, was im 1. Kapitel (Nr. 5) über die Wahl des Radius a der Bezugsbahn und die Integrationskonstante der Gleichung für S festgestellt worden ist, folgt: Die Integrationskonstante ea der Differentialgleichung für ΔS ist in dieser Näherung, aus demselben Grunde aber auch, wie sich später ergibt, in der nächsten Näherung gleich Null: $ea = 0$.

In der 3. Annäherung kann die Gleichung (9) mit allen Gliedern integriert werden. Als Näherungswert auf der rechten Seite dient dabei die Lösung (f) mit Hinzunahme des Variationsgliedes $+\frac{59}{12}\mu^3 \sin 2\xi$ von (10). Bildet man damit die rechte Seite von (9), dann wird bei Berücksichtigung aller Glieder, die zur erstrebten Genauigkeit beitragen,

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} = n\Big\{1-\mu+\Big(\frac{11}{4}\mu^2+\frac{85}{12}\mu^3+\frac{539}{36}\mu^4\Big)\cos 2\xi \\ +\frac{201}{64}\mu^4\cos 4\xi+2\Big(1+\frac{1}{6}\mu^2-\frac{735}{128}\mu^3+b^*\Big)e\cos\Phi \\ +\Big(\frac{15}{4}\mu+\frac{143}{16}\mu^2+\frac{27769}{768}\mu^3+\frac{15}{4}\mu b^*\Big)e\cos(2\xi-\Phi) \\ +\Big(\frac{51}{8}\mu^2+\frac{135}{8}\mu^3\Big)e\cos(2\xi+\Phi)+\frac{765}{64}\mu^3 e\cos(4\xi-\Phi)\Big\},\end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned}\text{also } H = n(1-\mu)t+\Big(\frac{11}{8}\mu^2+\frac{59}{12}\mu^3+\frac{893}{72}\mu^4\Big)\sin 2\xi \\ +\frac{201}{256}\mu^4\sin 4\xi+2\Big(1+\frac{11}{12}\mu^2+\frac{165}{128}\mu^3+b^*\Big)e\sin\Phi \\ +\Big(\frac{15}{4}\mu+\frac{263}{16}\mu^2+\frac{50857}{768}\mu^3+\frac{15}{4}\mu b^*\Big)e\sin(2\xi-\Phi) \\ +\Big(\frac{17}{8}\mu^2+\frac{169}{24}\mu^3\Big)e\sin(2\xi+\Phi)+\frac{255}{64}\mu^3 e\sin(4\xi-\Phi).\end{aligned}$$

Der Koeffizient b^* im Gliede mit dem Argument $\Phi = c\,n\,t - \pi_0$ ist bis jetzt unbestimmbar geblieben, ist also noch beliebig wählbar: Die Konstante b^* werde nun so festgelegt, daß das Glied mit $\sin\Phi$

den Koeffizienten $2e$ hat. Das bedeutet, daß die Exzentrizität der gestörten Mondbahn gleich der Exzentrizität e der ungestörten Keplerellipse ist. Für b^* ergibt sich durch diese Festlegung der Wert

$$b^* = -\frac{11}{12}\mu^2 - \frac{165}{128}\mu^3$$

und damit für H

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} H = v - v_1 &= n(1-\mu)t \\ &+\left(\frac{11}{8}\mu^2+\frac{59}{12}\mu^3+\frac{893}{72}\mu^4\right)\sin 2\xi + \frac{201}{256}\mu^4 \sin 4\xi \\ &+2e\sin\Phi+\left(\frac{15}{4}\mu+\frac{263}{16}\mu^2+\frac{48217}{768}\mu^3\right)e\sin(2\xi-\Phi) \\ &+\left(\frac{17}{8}\mu^2+\frac{169}{24}\mu^3\right)e\sin(2\xi+\Phi)+\frac{255}{64}\mu^3 e\sin(4\xi-\Phi) \\ &\xi = n(1-\mu)t \qquad \Phi = cnt - \pi_0 . \end{aligned}\right.$$

9. Man kann jetzt auch den analytischen Ausdruck für den Radiusvektor $r = a[1+\varphi(\mu, e)]$ des Mondes, wo $\varphi(\mu, e) = \varphi(\mu) + \Delta\varphi$ ist, berechnen. Mit den Ausdrücken (I, 12) und (6b) für diese Funktionen und mit dem Werte für b^* findet man

$$(12a)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1-\frac{1}{6}\mu^2-\frac{65}{288}\mu^4-\left(\mu^2+\frac{19}{6}\mu^3+\frac{125}{18}\mu^4\right)\cos 2H \\ &+\mu^4\cos 4H-\left(1-\frac{11}{12}\mu^2-\frac{165}{128}\mu^3\right)e\cos w \\ &-\left(\frac{15}{8}\mu+\frac{241}{32}\mu^2+\frac{38249}{1536}\mu^3\right)e\cos(2H-w) \\ &+\left(\frac{13}{8}\mu^2+\frac{19}{3}\mu^3\right)e\cos(2H+w)+\frac{195}{64}\mu^3 e\cos(4H-w). \end{aligned}\right.$$

Setzt man hier für H seinen Wert (11) ein, dann hat man in der benutzten Genauigkeit für r als Funktion der Zeit t

$$
(12b)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{r}{a}=1-\frac{1}{6}\mu^2+\frac{331}{288}\mu^4-\left(\mu^2+\frac{19}{6}\mu^3+\frac{125}{18}\mu^4\right)\cos 2\xi\\
&\quad-\frac{3}{8}\mu^4\cos 4\xi-\left(1-\frac{11}{12}\mu^2-\frac{405}{64}\mu^3\right)e\cos\Phi\\
&\quad-\left(\frac{15}{8}\mu+\frac{155}{32}\mu^2+\frac{23689}{1536}\mu^3\right)e\cos(2\xi-\Phi)\\
&\quad-\left(\frac{17}{16}\mu^2+\frac{151}{48}\mu^3\right)e\cos(2\xi+\Phi)-\frac{255}{128}\mu^3 e\cos(4\xi-\Phi)\\
&\xi=n(1-\mu)t\quad \Phi=cnt-\pi_0\quad c=1-\frac{3}{4}\mu^2-\frac{225}{32}\mu^3-\frac{4071}{128}\mu^4.
\end{aligned}\right.
$$

Die Gleichungen (11) und (12b) bestimmen die Bewegung des Mondes in Abhängigkeit von der Zeit; sie enthalten die wichtigsten Störungen, die mit der nullten und ersten Potenz der Mondexzentrizität proportional und unabhängig von der Neigung sind.

10. Zum Schluß soll noch erwähnt werden, wie man die mit e^2 proportionalen Glieder der Mondbewegung berechnen kann. Man hat dazu die 2. Variation der Gleichungen (I, 9) zu bilden, also dort

$$
(13)\qquad \left\{\begin{aligned}
\varphi(\mu,e)&=\varphi(\mu)+\Delta\varphi(\mu,e^1)+\delta\varphi(\mu,e^2)\\
S(\mu,e)&=S(\mu)+\Delta S(\mu,e^1)+\delta S(\mu,e^2)
\end{aligned}\right.
$$

zu setzen, wenn man unter $\delta\varphi$ und δS die Glieder mit dem Faktor e^2 versteht. Beachtet man dann, daß für $\varphi(\mu)$ und $S(\mu)$ die Differentialgleichungen (I, 9) und für $\Delta\varphi$ und ΔS die Gleichungen (II, 2) bestehen, dann erhält man mit dem Ansatz (13) aus (I, 9) ein Gleichungssystem für die gesuchten Funktionen $\delta\varphi$ und δS.

Zur näheren Erläuterung werden im folgenden wenigstens die wichtigsten Glieder der 2. Variationsgleichungen abgeleitet: Glieder mit μ^2 sollen dabei noch berücksichtigt werden. Beachtet man in bezug auf μ und e die Größenordnungen der sechs auf der rechten Seite von (13) stehenden Funktionen, dann findet man aus der ersten Gleichung (I, 9) leicht (es ist $\Delta S\approx\mu^2$!)

$$
\frac{d(S+\Delta S+\delta S)}{dH}=\frac{3}{2}\mu^2\sin 2H(1+\Delta\varphi+\delta\varphi)^4(1+\delta S)^3,
$$

(14a) also $$\frac{d\,\Delta S}{dH}=\frac{3}{2}\mu^2\sin 2H\,(4\,\delta\varphi+3\,\delta S+6\,\Delta\varphi^2).$$

Bei der zweiten Gleichung (I, 9) werden die Glieder einzeln ins Auge gefaßt und ihr Beitrag zur 2. Variation bestimmt. Für $\frac{dH}{dv}$ hat man dabei seinen 2. Variationswert aus (I, 9), nämlich

$$\frac{dH}{dv}=1-\mu(1+2\,\Delta\varphi+2\,\delta\varphi+\delta S+\Delta\varphi^2)$$

und $$\left(\frac{dH}{dv}\right)^2=(1-\mu)^2-2\,\mu\,(2\,\Delta\varphi+2\,\delta\varphi+\delta S+\Delta\varphi^2)$$
$$+\mu^2(4\,\Delta\varphi+4\,\delta\varphi+2\,\delta S+6\,\Delta\varphi^2)$$

zu benutzen. Damit und mit dem Ansatz (13) lautet das erste Glied

$$A=\frac{d^2(\varphi+\Delta\varphi+\delta\varphi)}{dH^2}(1+\varphi+\Delta\varphi+\delta\varphi)\left(\frac{dH}{dv}\right)^2$$
$$=\left[\frac{d^2\varphi}{dH^2}(1+\Delta\varphi+\delta\varphi)+\frac{d^2\,\Delta\varphi}{dH^2}(1+\varphi+\Delta\varphi)+\frac{d^2\delta\varphi}{dH^2}(1+\varphi)\right][(1-\mu)^2$$
$$-2\,\mu\,(2\,\Delta\varphi+2\,\delta\varphi+\delta S+\Delta\varphi^2)+\mu^2(4\,\Delta\varphi+4\,\delta\varphi+2\,\delta S+6\,\Delta\varphi^2)].$$

Hierin heißen in der betrachteten Näherung die Glieder mit e^2

$$A^*=\frac{d^2\varphi}{dH^2}\delta\varphi+\frac{d^2\,\Delta\varphi}{dH^2}\Delta\varphi(1-6\mu+5\mu^2)+\frac{d^2\delta\varphi}{dH^2}[(1-\mu)^2+\varphi].$$

Für das Glied $2\left(\frac{d\varphi}{dH}\right)^2\frac{dH}{dv}$ findet man mit (13)

$$B=2\left(\frac{d\varphi}{dH}+\frac{d\,\Delta\varphi}{dH}+\frac{d\,\delta\varphi}{dH}\right)^2[1-\mu(1+2\,\Delta\varphi+2\,\delta\varphi+\delta S+\Delta\varphi^2)],$$

also $$B^*=2\left[\left(\frac{d\,\Delta\varphi}{dH}\right)^2(1-\mu)+2\,\frac{d\varphi}{dH}\,\frac{d\,\delta\varphi}{dH}\right].$$

Ebenso ergibt sich

$$C=\frac{3}{2}\mu^2\sin 2H\left(\frac{d\,\Delta\varphi}{dH}+\frac{d\,\delta\varphi}{dH}\right)(1+\Delta\varphi)^5\cdot 1$$

$$C^*=\frac{3}{2}\mu^2\sin 2H\left(5\,\frac{d\,\Delta\varphi}{dH}\Delta\varphi+\frac{d\,\delta\varphi}{dH}\right).$$

Bei den von Ableitungen nach H freien beiden letzten Gliedern D von (I, 9) führt die Taylorsche Entwicklung nach Potenzen von e bequemer zum Ziele. Aus der Entwicklung

$$D = D_0 + \frac{e}{1}\left[\frac{\partial D}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{de} + \frac{\partial D}{\partial S}\frac{dS}{de}\right] + \frac{e^2}{2}\left[\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{de}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi\, \partial S}\frac{d\varphi}{de}\frac{dS}{de} + \frac{\partial^2 D}{\partial S^2}\left(\frac{dS}{de}\right)^2 + \frac{\partial D}{\partial \varphi}\frac{d^2\varphi}{de^2} + \frac{\partial D}{\partial S}\frac{d^2 S}{de^2}\right] + \cdots$$

findet man mit $\frac{d\varphi}{de} = \frac{\Delta\varphi + 2\delta\varphi}{e}$ usw. und (13) für die Glieder mit e^2

$$\begin{aligned} D^* &= \frac{\partial D}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial D}{\partial S}\delta S + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2}\Delta\varphi^2 + 2\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi\, \partial S}\Delta\varphi\,\Delta S\right] \\ &= -\delta\varphi\,[1 - 3\mu^2 - 9\mu^2\cos 2H + 4\varphi + 6S] \\ &\quad -\delta S\,[2 - \mu^2 - 3\mu^2\cos 2H + 6\varphi + 2S] \\ &\quad -\Delta\varphi^2\left[2 - \frac{15}{2}\mu^2 - \frac{45}{2}\mu^2\cos 2H + 3\varphi + 6S\right] - 6\Delta\varphi\,\Delta S. \end{aligned}$$

Die Glieder A^* bis D^* liefern aus der zweiten Gleichung (I, 9) die gesuchte Gleichung für $\delta\varphi$

$$\text{(14 b)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\delta\varphi}{dH^2}[(1-\mu)^2 + \varphi] = \frac{d\delta\varphi}{dH}\left[4\frac{d\varphi}{dH} + \frac{3}{2}\mu^2\sin 2H\right] \\ &\quad -\delta\varphi\left[1 - 3\mu^2 - 9\mu^2\cos 2H + 4\varphi + 6S + \frac{d^2\varphi}{dH^2}\right] \\ &\quad -\delta S\,[2 - \mu^2 - 3\mu^2\cos 2H + 6\varphi + 2S] + 2\left(\frac{d\Delta\varphi}{dH}\right)^2(1-\mu) \\ &\quad -\Delta\varphi\left[\frac{d^2\Delta\varphi}{dH^2}(1 - 6\mu + 5\mu^2) - \frac{15}{2}\mu^2\frac{d\Delta\varphi}{dH}\sin 2H + 6\Delta S\right] \\ &\quad -\Delta\varphi^2\left[2 - \frac{15}{2}\mu^2 - \frac{45}{2}\mu^2\cos 2H + 3\varphi + 6S\right]. \end{aligned}\right.$$

Schließlich hat man noch mit dem Ansatz (13) die vierte Gleichung (I, 9) zu bilden. Das gibt nach einiger Umformung

$$\text{(14 c)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = n\{&1 - \mu - 2\varphi - S - \Delta\varphi\,(2 - 6\varphi - 2S) - \Delta S \\ &-\delta\varphi\,(2 - 6\varphi - 2S) - \delta S\,(1 - 2\varphi - 2S) \\ &+\Delta\varphi^2\,(3 - 12\varphi - 3S) + 2\Delta\varphi\,\Delta S\}. \end{aligned}\right.$$

Die drei Gleichungen (14), die man als 2. Variationsgleichungen bezeichnen kann, erlauben die mit e^2 proportionalen Glieder der Mondstörungen zu berechnen. Ihre Integration gelingt wie die der (1.) Variationsgleichungen durch sukzessive Approximation. Sie wird aber hier nicht mehr durchgeführt, da sie nichts wesentlich Neues bringt. Die Gleichungen (14) sollen zum Schluß nur benutzt werden, um kurz die Glieder in den Ausdrücken für die Mondbewegung zu berechnen, die schon in der ungestörten Bewegung ($\mu = 0$) vorkommen. Für $\mu = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen (14) zu

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d\,\delta S}{dH} = 0, \quad \dfrac{d^2\delta\varphi}{dH^2} + \delta\varphi = -2\,\delta S + 2\left(\dfrac{d\,\Delta\varphi}{dH}\right)^2 - \Delta\varphi\,\dfrac{d^2\Delta\varphi}{dH^2} - 2\,\Delta\varphi^2 \\ \dfrac{dH}{dt} = n\left\{1 - 2\,\Delta\varphi - 2\,\delta\varphi - \delta S + 3\,\Delta\varphi^2\right\}. \end{cases}$$

δS ist also konstant. Zur Bestimmung der Integrationskonstante wird der Flächensatz für $\mu = 0$ betrachtet. Nach (I, 4) ist

$$r^2\dot{v} = \frac{\sqrt{(M+m)\,a}}{1+S} = \sqrt{(M+m)\,a}\cdot(1-\delta S).$$

Andrerseits ist bekanntlich

$$r^2\dot{v} = \sqrt{(M+m)\,a\,(1-e^2)} = \sqrt{(M+m)\,a}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\,e^2\right).$$

(16a) Demnach ist $$\delta S = \frac{1}{2}\,e^2.$$

Damit und mit $\Delta\varphi = -\,e\cos w$ lautet dann die zweite Gleichung (15)

$$\frac{d^2\delta\varphi}{dH^2} + \delta\varphi = -\frac{1}{2}\,e^2 - \frac{3}{2}\,e^2\cos 2w,$$

(16b) also $$\delta\varphi = -\frac{1}{2}\,e^2 + \frac{1}{2}\,e^2\cos 2w.$$

Mit (16a, b) wird schließlich aus der dritten Gleichung (15)

$$\frac{dH}{dt} = n\left\{1 + 2\,e\cos w + 2\,e^2 + \frac{1}{2}\,e^2\cos 2w\right\}.$$

Durch schrittweise Näherung erhält man hieraus leicht

$$H = nt + 2e\sin\Phi + \frac{5}{4}e^2\sin 2\Phi, \tag{16c}$$

wenn jetzt Φ in Änderung zu (12) als Abkürzung für $nt - \pi_0$ gesetzt ist.

III.

Das Problem der ebenen Bewegung des Mondes ist in dieser Arbeit durch die Differentialgleichungen (9) des ersten Kapitels bestimmt, die es streng beschreiben, wenn man von den parallaktischen Gliedern absieht. Als erste Lösung dieser Gleichungen ist die periodische Lösung (I, 12) der Variation gefunden worden. Von dieser ausgehend sind zur Ermittelung einer genaueren Nachbarlösung im zweiten Kapitel die Variationsgleichungen (2) aufgestellt und integriert worden. Ihre Lösungen (II, 6) erlauben es, auf dem Wege über die charakteristischen Exponenten etwas über die Stabilität der durch die Variation (I, 12) beschriebenen Bahn auszusagen. Dazu müssen die charakteristischen Exponenten des Systems (II, 2) der Variationsgleichungen berechnet werden.

Die beiden ersten dieser Gleichungen für $\Delta\varphi$ und ΔS sind linear und also, da die Gleichung für $\Delta\varphi$ von zweiter Ordnung ist, mit einem System von drei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung gleichwertig. Man erhält dieses sofort aus (II, 2a, b) durch Einführung einer neuen Funktion $\Delta\Phi$ mittelst der Substitution $\frac{d\Delta\varphi}{dH} = \Delta\Phi$. Die beiden erwähnten Gleichungen gehen dann über in ein System von der Form

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\Delta\Phi}{dH} &= a_{11}\Delta\Phi + a_{12}\Delta\varphi + a_{13}\Delta S \\ \frac{d\Delta\varphi}{dH} &= \Delta\Phi \\ \frac{d\Delta S}{dH} &= a_{32}\Delta\varphi + a_{33}\Delta S, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

wo die a_{ik}-Funktionen der Variation φ und S, also periodische Funktionen der unabhängigen Veränderlichen H mit der Periode $H=\pi$ sind.

Nach der Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung lassen sich die partikulären Lösungen eines solchen Systems in der Form

$$(2) \qquad \Delta\Phi = e^{\gamma_\nu H} f_{1\nu}(H), \quad \Delta\varphi = e^{\gamma_\nu H} f_{2\nu}(H), \quad \Delta S = e^{\gamma_\nu H} f_{3\nu}(H)$$

schreiben, wo die $f_{i\nu}(H)$ periodische Funktionen von H sind und dieselbe Periode $H=\pi$ wie die a_{ik} in (1) haben. Die γ_ν sind die sogenannten charakteristischen Exponenten des Systems (1). Sie geben eine Möglichkeit festzustellen, ob die durch die periodische Lösung der Variation beschriebene Bahn stabil ist: Sind nämlich die γ_ν in (2) rein imaginär, dann ist die durch die Funktionen φ und S in (I, 12) beschriebene periodische Bahn stabil.

Die charakteristischen Exponenten des Systems (1) sind durch die Determinantengleichung

$$(3) \qquad 0 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_1}\right)_0 + 1 - e^{\gamma\pi} & \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_3}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_2}\right)_0 + 1 - e^{\gamma\pi} & \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_3}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_3}\right)_0 + 1 - e^{\gamma\pi} \end{vmatrix}$$

bestimmt, in der die β_i und ψ_i definiert sind durch

$$(3\,a) \qquad \begin{cases} \beta_1 = (\Delta\Phi)_{H=0} & \beta_2 = (\Delta\varphi)_{H=0} & \beta_3 = (\Delta S)_{H=0} \\ \psi_1 = (\Delta\Phi)_{H=\pi} - \beta_1 & \psi_2 = (\Delta\varphi)_{H=\pi} - \beta_2 & \psi_3 = (\Delta S)_{H=\pi} - \beta_3 . \end{cases}$$

Dabei bestehen für die in (3 a) auftretenden Funktionen $\Delta\Phi = \frac{d\,\Delta\varphi}{d\,H}$, $\Delta\varphi$ und ΔS nach den Untersuchungen des zweiten Kapitels Ausdrücke von der Form

$$
(4)\quad \begin{cases} \Delta\Phi = a_1 \sin w + a_2 \sin(2H-w) + a_3 \sin(2H+w) \\ \qquad\qquad + a_4 \sin(4H-w) + \cdots \\ \Delta\varphi = b_0\alpha + b_1 \cos w + b_2 \cos(2H-w) + b_3 \cos(2H+w) \\ \qquad\qquad + b_4 \cos(4H-w) + \cdots \\ \Delta S = c_0\,\alpha + c_1 \cos w + c_2 \cos(2H-w) + c_3 \cos(2H+w) \\ \qquad\qquad + c_4 \cos(4H-w) + \cdots \end{cases}
$$

wo $w = \dfrac{cH}{1-\mu} - \pi_0$ und α die Integrationskonstante der Differentialgleichung für ΔS ist und die a_i, b_i, c_i mit e proportionale unendliche Potenzreihen in dem kleinen Parameter μ sind, deren erste Glieder (teilweise bis μ^4) im zweiten Kapitel berechnet worden sind.

Aus (4) folgt für $H=0$

$$
(5)\quad \begin{cases} (\Delta\Phi)_{H=0} = \beta_1 = A_0 \sin\pi_0 \\ (\Delta\varphi)_{H=0} = \beta_2 = B_0 \cos\pi_0 + b_0\alpha \\ (\Delta S)_{H=0} = \beta_3 = C_0 \cos\pi_0 + c_0\alpha, \end{cases}
$$

wobei die A_0, B_0, C_0, b_0, c_0 Funktionen von μ und mit e proportional sind. Für die ψ_i erhält man aus (4) mit $H=\pi$, wenn man die Konstante $\dfrac{c\pi}{1-\mu}$ mit δ bezeichnet,

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= -A_0(\sin\delta\cos\pi_0 - \cos\delta\sin\pi_0) - \beta_1 \\
\psi_2 &= +B_0(\cos\delta\cos\pi_0 + \sin\delta\sin\pi_0) + b_0\alpha - \beta_2 \\
\psi_3 &= +C_0(\cos\delta\cos\pi_0 + \sin\delta\sin\pi_0) + c_0\alpha - \beta_3.
\end{aligned}
$$

Hierin hat man noch die Größen $\cos\pi_0$, $\sin\pi_0$ und die Integrationskonstante α durch die Anfangswerte β_i mit Hilfe der Gleichungen (5) auszudrücken. Man findet

$$
\cos\pi_0 = \frac{1}{D}(c_0\beta_2 - b_0\beta_3) \qquad \sin\pi_0 = \frac{\beta_1}{A_0}
$$

$$
\alpha = -\frac{1}{D}(C_0\beta_2 - B_0\beta_3) \qquad D = B_0 c_0 - C_0 b_0.
$$

Damit werden die ψ_i als Funktionen der Anfangswerte β_i zu

$$(6)\quad \begin{cases} \psi_1 = \beta_1(\cos\delta - 1) - \dfrac{A_0}{D}(c_0\beta_2 - b_0\beta_3)\sin\delta \\ \psi_2 = \beta_1\left(\dfrac{B_0}{A_0}\sin\delta\right) + \beta_2\dfrac{B_0 c_0}{D}(\cos\delta - 1) - \beta_3\dfrac{B_0 b_0}{D}(\cos\delta - 1) \\ \psi_3 = \beta_1\left(\dfrac{C_0}{A_0}\sin\delta\right) + \beta_2\dfrac{C_0 c_0}{D}(\cos\delta - 1) - \beta_3\dfrac{C_0 b_0}{D}(\cos\delta - 1) \end{cases}$$

Die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\psi_1,\psi_2,\psi_3)}{\partial(\beta_1,\beta_2,\beta_3)} = \begin{vmatrix} \cos\delta - 1 & -\dfrac{A_0 c_0}{D}\sin\delta & \dfrac{A_0 b_0}{D}\sin\delta \\ \dfrac{B_0}{A_0}\sin\delta & \dfrac{B_0 c_0}{D}(\cos\delta - 1) & -\dfrac{B_0 b_0}{D}(\cos\delta - 1) \\ \dfrac{C_0}{A_0}\sin\delta & \dfrac{C_0 c_0}{D}(\cos\delta - 1) & -\dfrac{C_0 b_0}{D}(\cos\delta - 1) \end{vmatrix}$$

$$= B_0 C_0 \frac{c_0}{D}\left(-\frac{b_0}{D}\right)\cdot\begin{vmatrix} \cos\delta - 1 & -A_0\sin\delta & -A_0\sin\delta \\ \dfrac{1}{A_0}\sin\delta & \cos\delta - 1 & \cos\delta - 1 \\ \dfrac{1}{A_0}\sin\delta & \cos\delta - 1 & \cos\delta - 1 \end{vmatrix}$$

ist gleich Null; folglich verschwindet wegen der Bestimmungsgleichung (3) für die charakteristischen Exponenten γ_ν mindestens einer von ihnen. Da die Differentialgleichungen (1) aber die unabhängige Veränderliche H explizit enthalten, so folgt daraus, daß sie ein Integral zulassen, nämlich das aus dem Jakobischen Integral der Bewegungsgleichungen (I, 9) ableitbare.

Man kann nun die Determinantengleichung (3) für die charakteristischen Exponenten aufstellen. Sie lautet

$$0 = \begin{vmatrix} \cos\delta - e^{\gamma\pi} & -\dfrac{A_0 c_0}{D}\sin\delta & \dfrac{A_0 b_0}{D}\sin\delta \\ \dfrac{B_0}{A_0}\sin\delta & \dfrac{B_0 c_0}{D}(\cos\delta - 1) + 1 - e^{\gamma\pi} & -\dfrac{B_0 b_0}{D}(\cos\delta - 1) \\ \dfrac{C_0}{A_0}\sin\delta & \dfrac{C_0 c_0}{D}(\cos\delta - 1) & -\dfrac{C_0 b_0}{D}(\cos\delta - 1) + 1 - e^{\gamma\pi} \end{vmatrix}$$

und läßt sich umformen in

$$0 = \begin{vmatrix} \cos\delta - e^{\gamma\pi} & -\dfrac{A_0 c_0}{D}\sin\delta & 0 \\ \dfrac{B_0}{A_0}\sin\delta & \dfrac{B_0 c_0}{D}(\cos\delta - 1) + 1 - e^{\gamma\pi} & \dfrac{b_0}{c_0}(1 - e^{\gamma\pi}) \\ \dfrac{C_0}{A_0}\sin\delta & \dfrac{C_0 c_0}{D}(\cos\delta - 1) & 1 - e^{\gamma\pi} \end{vmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} \cos\delta - e^{\gamma\pi} & -\dfrac{A_0 c_0}{D}\sin\delta & 0 \\ \dfrac{D}{A_0 c_0}\sin\delta & \cos\delta - e^{\gamma\pi} & 0 \\ \dfrac{C_0}{A^0}\sin\delta & \dfrac{C_0 c_0}{D}(\cos\delta - 1) & 1 - e^{\gamma\pi} \end{vmatrix}$$

$$0 = (1 - e^{\gamma\pi})\left\{(\cos\delta - e^{\gamma\pi})^2 + \sin^2\delta\right\} \qquad \delta = \frac{c\pi}{1-\mu}.$$

Das Verschwinden der ersten Klammer wird durch die schon bekannte Wurzel $\gamma_1 = 0$ erreicht; das Verschwinden der zweiten Klammer gibt

$$\cos\frac{c\pi}{1-\mu} - e^{\gamma\pi} = \mp i \sin\frac{c\pi}{1-\mu}$$

$$\cos\frac{c\pi}{1-\mu} \pm i\sin\frac{c\pi}{1-\mu} = e^{\gamma\pi},$$

d. h.

$$\gamma = \pm\frac{c}{1-\mu}i.$$

Die charakteristischen Exponenten des Systems (2) sind folglich

$$(7) \qquad \gamma_1 = 0 \qquad \gamma_2 = +\frac{c}{1-\mu}i \qquad \gamma_3 = -\frac{c}{1-\mu}i,$$

wobei c die mittlere Bewegung des Perihels ist. Die von Null verschiedenen charakteristischen Exponenten sind also rein imaginär und konjugiert zueinander. Deshalb ist die durch die Differentialgleichungen (I, 9) bestimmte periodische Bahn der Variation (I, 12) stabil.

Schrifttum.

1. F. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste. T. III. Paris 1894.
2. M. H. Andoyer, Cours de Mécanique Céleste. Tome II. Paris 1926.
3. E. W. Brown, An Introductory Treatise on the Lunar Theory. Cambridge 1896.
4. E. T. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. Berlin 1924.
5. E. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique. T. II, III. Paris 1924, 1925.

Lebenslauf.

Ich bin am 4. November 1908 in Breslau als Sohn des jetzigen Reichsbahnsekretärs August Karras geboren. Nach Ablegung der Reifeprüfung studierte ich vom S.-S. 1928 ab zuerst an der Universität, von meinem 5. Semester ab an der Technischen Hochschule Breslau Mathematik, Physik und Chemie. Im Februar 1933 bestand ich die wissenschaftliche, im Februar 1935 die pädagogische Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen. Am 1. April 1935 wurde ich zum Studienassessor ernannt. Nach einer einjährigen Tätigkeit an einer privaten höheren Schule in Oldenburg i. O. kam ich am 1. April 1936 als wissenschaftlicher Assistent an den Lehrstuhl für Geometrie der Technischen Hochschule Breslau zu Herrn Prof. Dr. Happel. Ihm sage ich auch an dieser Stelle für die Anregung zu vorliegender Arbeit und für die in steter Anteilnahme gewidmete Unterstützung meinen herzlichsten Dank.